Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις, 3-2-2021

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Σχόλιο: Όλα τα θέματα ήταν κοινά και στις 5 ομάδες εκτός από ένα συγκεκριμένο θέμα το οποίο ήταν μη κοινό από ομάδα σε ομάδα.

Προκειμένου να επεξεργαστείτε τα θέματα θα πρέπει να αντικατασταθούν οι παράμετροι a, b, c, d ως εξής:
a: Αριθμός Μητρώου σας
b: το πλήθος των χαρακτήρων του ονόματός σας
c: το πλήθος των χαρακτήρων του επιθέτου σας
d: το υπόλοιπο της διαίρεσης του a με το 3
Απαντήσεις σε θέματα που δεν έχουν γίνει οι παραπάνω αντικαταστάσεις δεν είναι έγκυρες.

Να επιλεγούν οι σωστές απαντήσεις σε όλα τα θέματα και να αιτιολογηθούν.

• Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
• Η βαθμολογία κάθε θέματος διαμοιράζεται ισομερώς στις σωστές απαντήσεις.
• Η κατανομή του βαθμού που αντιστοιχεί και κάθε σωστή απάντηση είναι 1/3 για την επιλογή και 2/3 για την (επαρκή) απάντηση.
• Λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται αρνητικά με $-0,3$.

Θέμα (1) (Μη κοινό) Για τις συναρτήσεις

$$1, x, x^2, \cos(bx), \sin(bx), \cos((b+1)x), \sin((b+1)x), \ldots, \cos(ax), \sin(ax)$$

ισχύει ότι:

(i) είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[\gamma, \delta]$.

(ii) είναι γραμμικά εξαρτημένες σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[-\gamma, \gamma]$.

(iii) είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$.

(iv) Υπάρχει ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης $a - b + 3$ της οποίας είναι βασικό σύνολο λύσεων.

(v) Υπάρχει ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης $2(a - b) + 5$ της οποίας είναι βασικό σύνολο λύσεων.

(vi) κανένα από τα προηγούμενα.

Θέμα (2) Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$L_\lambda(y) := (t^2 - bt - c)y'' + (2t - b)y' + \lambda(t^2 + 1)y = 0.$$

(i) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς μία λύση y με $y(0) = a$ και $y'(0) = d$.

(ii) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο δεν υπάρχει λύση y με $y(0) = a$ και $y'(0) = d$.

(iii) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις y με $y(0) = a$ και $y'(0) = d$.

(iv) Για δεδομένα $\lambda_1 \neq \lambda_2 > 0$, υπάρχουν $p, q \in \mathbb{R}, p \neq q$ τέτοιο ώστε για y_1, y_2 (μη τετριμμένες) λύσεις, αντίστοιχα, των εξισώσεων $L_{\lambda_1} = 0, L_{\lambda_2} = 0$, οι συναρτήσεις y_1, y_2 να είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[p, q]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $t^2 + 1$.

(v) Για δεδομένα $\lambda_1 \neq \lambda_2 > 0$, υπάρχουν $p, q \in \mathbb{R}, p \neq q$ τέτοιο ώστε για y_1, y_2 (μη τετριμμένες) λύσεις, αντίστοιχα, των εξισώσεων $L_{\lambda_1} = 0, L_{\lambda_2} = 0$, οι συναρτήσεις y_1, y_2 να είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[p, q]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $e^{t^2 - bt - c}$.

(vi) Η εξίσωση δεν είναι δυνατόν να έχει πολυωνυμικές λύσεις.

(vii) Δεν υπάρχουν τιμές του $\lambda > 0$ για τις οποίες η εξίσωση έχει (μη τετριμμένες) πολυωνυμικές λύσεις.

(viii) Για $\lambda = a$ η εξίσωση $L_a(y) = t^n$ έχει (μη τετριμμένες) πολυωνυμικές λύσεις.

(ix) κανένα από τα προηγούμενα.

Θέμα (3) Ας είναι y_1, y_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις στο διάστημα I μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $n-$τάξης (E) με $y_1(t)y_2(t) \neq 0$ και $\{w_i : i = 1, 2, \ldots, n-1$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (E_{n-1}) η οποία προκύπτει από υποβιβασμό τάξης της (E) με χρήση της y_1. Τότε ισχύει ότι:

(i) υπάρχουν σταθερές $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $W(y_1, y_2) = {y_1}^2(t) \sum_{i=1}^{n-1} c_i w_i(t),\ t \in I.$

(ii) υπάρχουν σταθερές $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $W(y_1, y_2) = {y_2}^2(t) \sum_{i=1}^{n-1} c_i w_i(t),\ t \in I.$

(iii) υπάρχουν σταθερές $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $W(y_1, y_2) = y_1(t) \sum_{i=1}^{n-1} c_i w_i(t),\ t \in I.$

(iv) υπάρχουν σταθερές $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $y_2(t) = y_1(t) \sum_{i=1}^{n-1} c_i w_i(t),\ t \in I.$

(v) $y_2(t) = y_1(t) w_2(t),\ t \in I.$

(v) $y_1(t) = y_2(t) w_2(t),\ t \in I.$

(vi) κανένα απο τα προηγούμενα

Θέμα (4) Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση

$$y' - 2by + (t^{\frac{c}{b}} + 1)y^2 + g(t) = 0$$

έχει λύση τη συνάρτηση $y_1(t) = b(t^{\frac{c}{b}} + 1)^{-1}$, τότε

(i) για κάθε λύση y τη εξίσωσης το $\lim_{t \to +\infty} y(t) \in \mathbb{R}$.

(ii) όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι φραγμένες.

(iii) υπάρχει λύση y της εξίσωσης με $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

(iv) δεν υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις της εξίσωσης.

(v) κανένα από τα παραπάνω.

Θέμα (5) Αν $L(y) := y'' - cy' - by$ και H_a η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

(i) Η εξίσωση $L(y) = (1-H_a(t))e^{(-1)^b(t-a)^2+(t-a)^{2021}}$ είναι επιλύσιμη με χρήση μετασχηματισμού Laplace.

(ii) Η εξίσωση $L(y) = H_a(t)e^{(-1)^b(t-a)^2+\sin(t-a)}$ είναι επιλύσιμη με χρήση μετασχηματισμού Laplace.

(iii) Υπάρχει μη μηδενική λύση της εξίσωσης $L(y) = 0,\ y(0) = y(a) = 0$.

(iv) Η εξίσωση $L(y) = \sin^{2d+1}(t-a) + (t-a)^{2021}$ είναι επιλύσιμη με χρήση της μεθόδου των αγνώστων σταθερών

(v) κανένα από τα προηγούμενα.

Θέμα (6)

(i) Όλες οι λύσεις της εξίσωσης $y''' + k^2y'' = \lambda e^{-mt},\ k\lambda \neq 0, m > 0$ είναι ταλαντούμενες.

(ii) Δίνεται το σύστημα

$$(S) \quad {y_1}'' + b{y_2}' = ce^{-t},\ {y_2}'' - c{y_1}' = be^{-t}$$

(A) Υπάρχουν λύσεις (y_1, y_2) του συστήματος (S) όπου y_1 ταλαντούμενη και y_2 μη ταλαντούμενη.

(B) Όλες οι λύσεις του συστήματος (S) είναι ταλαντούμενες.

(C) Υπάρχουν συγκλίνουσες λύσεις (y_1, y_2) του συστήματος (S).

(D) Υπάρχουν μη μηδενικές, συγκλίνουσες λύσεις (y_1, y_2) του (S).

(E) Κανένα από τα προηγούμενα.

Υπόλοιπα μη κοινά θέματα:

Θέμα 1

Για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y(t)y'(t)(t^{\frac{b}{c}} + 1) = (y^2(t) - b^2)^a,\ t \geq 0,\ y(0) = \sqrt{b^2+1}$$

ισχύει ότι:

(i) είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις.

(ii) δεν υπάρχει λύση που να ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$.

(iii) υπάρχει ακριβώς μία λύση που να ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$ και τέτοια ώστε $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

(iv) υπάρχει ακριβώς μία λύση που να ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$ και για την οποία $\lim_{t \to +\infty} y(t) \in \mathbb{R}$.

(v) Κανένα από τα προηγούμενα.

Θέμα 2

Για $(E_0) : L(y) = 0, \ t \geq 0$ μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $n-$τάξης με συντελεστή $a_n = 1$, $c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n$ και $0 \neq f \in C([0, \infty))$.

(i) Υπάρχει μοναδικό β.σ.λ $\{y_1, \ldots, y_n\}$ της (E_0) με $y_{i+1}^{(j)}(0) = \delta_{i,j}, \ i, j = 0, 1, \ldots, n-1$.

(ii) Υπάρχει ακριβώς μία μερική λύση y_p της εξίσωσης $L(y) = f$ τέτοια ώστε για τη λύση y του προβλήματος αρχικών τιμών,$L(y) = f, \ y^{(i-1)}(0) = c_i, \ i = 0, 1, \ldots, n-1$ να είναι $y = y_p + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i, \ t \geq 0$.

(iii) Υπάρχει ακριβώς μία λύση που να ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$ και τέτοια ώστε $\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

(iv) Υπάρχει σύνολο λύσεων $\{y_1, \ldots, y_n\}$ της (E_0) με ${y_{i+1}}^{(j)}(0) = \delta_{i,j}, \ i, j = 1, 2, \ldots, n-1$ αλλά όχι απαραίτητα βασικό.

(v) Υπάρχει β.σ.λ $\{y_1, \ldots, y_n\}$ της (E_0) με ${y_{i+1}}^{(j)}(0) = \delta_{i,j}, \ i, j = 1, 2, \ldots, n-1$ αλλά όχι απαραίτητα μοναδικό.

(vi) Κανένα από τα προηγούμενα.

Θέμα 3

Οι συναρτήσεις $\cos(bx), \cos((b+1)x), \ldots, \cos(ax), \ x \in \mathbb{R}$,

(i) αποτελούν σύνολο λύσεων στο $I = (0, 2021)$ κάποιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

(ii) αποτελούν βασικό σύνολο λύσεων στο $I = (0, 2021)$ κάποιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με πραγματικού συντελεστές.

(iii) είναι γραμμικά εξαρτημένες λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης a τάξης με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές.

(iv) είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις στο $I = (0, 2021)$.

(v) Κανένα από τα προηγούμενα.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!